Ein schneller, paralleler Algorithmus zur Berechnung aller maximaler Cliquen eines Graphen

Alexander M. Gross

Seminar „*Algorithmen auf geordneten Strukturen*“

Priv.-Doz. Dr. Elias Dahlhaus
Institut für Informatik
Abteilung V
Wintersemester 1995/1996

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Ein schneller, paralleler Algorithmus zur Berechnung aller maximaler Cliquen eines Graphen ([DK 3])

Dieser schnelle, parallele Algorithmus zur Berechnung aller maximaler Cliquen bzw. maximaler unabhängiger Mengen in beliebigen Graphen benötigt $O(\log^3(nM))$ Parallelzeit und $O(M^6n^2)$ Prozessoren auf einer CREW-PRAM (concurrent read/exclusive write parallel random access machine), wobei n die Anzahl der Knoten und M die Anzahl der maximalen Cliquen sei.

Frühere Ansätze zur Berechnung aller maximaler Cliquen bzw. aller maximalen unabhängigen Mengen arbeiten sequentiell oder nur sehr eingeschränkt effizient parallel.

Gegeben sei ein beliebiger Graph G, eine natürliche Zahl K, bestimme K Cliquen von G oder bestimme, daß weniger als K Cliquen in G vorkommen.

Einige bedeutende Klassen von Graphen besitzen eine Anzahl von Cliquen, die polynomiell mit der Anzahl der Knoten im Graphen verknüpft ist. Ein Beispiel hierfür sind Kantengraphen. Für diese Klasse existieren Algorithmen, die in polynomieller Zeit die Menge aller Cliquen berechnen.

Ein Graph $G=(V,E)$ besteht aus einer Menge V von *Knoten* und einer Menge E von *Kanten*. Eine (maximale) *Clique* von G ist ein maximaler vollständiger Teilgraph von G. Daraus folgt, daß eine Clique durch die Menge ihrer Knoten identifiziert wird.

Wir nehmen im folgenden an, daß $G=(V,E)$ und $V=\{v_1,\ldots,v_n\}$. Es folgt die Beschreibung des Algorithmus.

```
ALGORITHM :

Input : G=(V,E), V={v1,...,vn}

// Menge von Cliquen von G=(V,E)
PROCEDURE CLIQUE(V,E)

IF |V|=1 THEN CLIQUE(V,E):={V}
ELSE
BEGIN
Sei G1 der Teilgraph von G induziert durch {v1,...,v⌐n/2¬}
Sei G2 der Teilgraph von G induziert durch {v⌐n/2¬+1,...,vn}

DO IN PARALLEL
U:=CLIQUE(G1)                 // Menge von Cliquen von G1
W:=CLIQUE(G2)                 // Menge von Cliquen von G2

FOR EACH u∈U, v∈W DO
BEGIN

PROCEDURE COMP_MAX(Du,v)
Du,v := {c⊆u∪v : c ist vollständig und maximal in G beschränkt auf u∪v}
Eu,v := {c∈Du,v : c ist eine Clique in G}

END
```

$CLIQUE(C) := \bigcup_{\substack{u\in U\\ v\in V}} E_{u,v}$

```
END

END PROCEDURE CLIQUE

Output : CLIQUE(V,E)
```